



Olimpiadas Regionales de Matemática, 2015.  
 Universidad de Antioquia  
 www.gkmath.com

**AVISO:** *Los textos aquí publicados son responsabilidad total de sus creadores. Estos son materiales en construcción.*

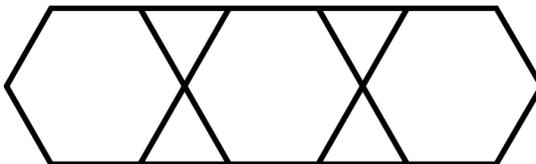
*Errores y/o comentarios por favor comunicarlos a:  
 olimpiadasmaticas@udea.edu.co*

## Áreas sombreadas: exploremos las simetrías.

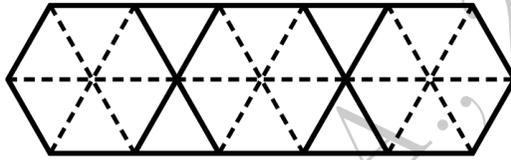
Las áreas sombreadas son una de las partes de las matemáticas que más nos gustan debido a que además de unas fórmulas fáciles de aplicar podemos visualizar su gráfico. Con este taller, mostramos que no siempre debemos aplicar una fórmula, que muchas veces para buscar un área sombreada sólo tenemos que buscar las simetrías que la figura nos pueda dar y hacer un conteo. Es así, como pasamos de hacer operaciones algebraicas a hacer combinatoria.

El siguiente ejemplo nos muestra como podemos hacer esto:

**Ejemplo 1** *En la figura tenemos tres hexágonos congruentes alineados, cada uno de estos hexágonos tienen área 36. ¿Cuál es el área del hexágono formado por toda la figura?*

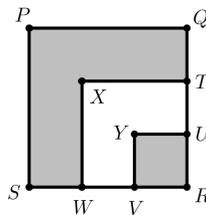


**Solución 1** Lo primero que debemos notar es que el área que debemos de hallar es la suma de los tres hexágonos y los cuatro triángulos pequeños. Pero cada hexágono se puede dividir en 6 triángulos pequeños. Y estos triángulos son todos congruentes a los pequeños de la figura inicial. Además, si el área de cada hexágono es 36, como cada uno de ellos tiene seis triángulos congruentes entonces el área de un triángulo es 6. El área del hexágono grande es la suma de todos los triángulos multiplicado por 6. Como son 22 triángulos, por tanto el área es  $22 \times 6 = 132$ .

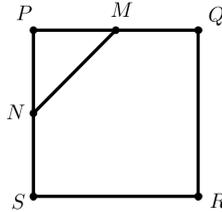


En los siguientes ejercicios debemos usar la estrategia para encontrar lo que nos piden en cada uno de ellos, los invitamos a jugar un poco con esta estrategia y resolverlos. No olvide que cada concepto que no entienda busquelo en internet o preguntele a algún profesor que le pueda despejar la duda, esto es importante dentro del proceso de solución de problemas.

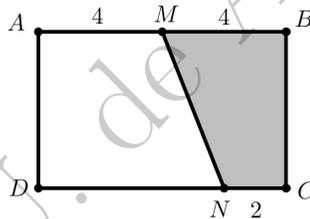
1. En la figura, el cuadrado  $PQRS$  es  $3 \times 3$ . Los puntos  $T$  y  $U$ , están sobre el lado  $QR$  de tal forma que  $QT = TU = UR = 1$ . Los puntos  $V$  y  $W$ , están sobre el lado  $RS$  de tal forma que  $RV = VW = WS = 1$ . Los segmentos  $TX$  y  $UY$  son perpendiculares a  $QR$  y los segmentos  $VY$  y  $WX$  son perpendiculares a  $RS$ . ¿Cuál es la razón del área sombreada con respecto a la no sombreada?



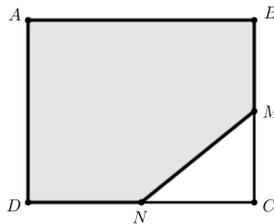
2. El cuadrado  $PQRS$  tiene un área de 900. El punto  $M$  es el punto medio del segmento  $PQ$  y el punto  $N$  es el punto medio de  $PS$ . ¿Cuál es el área del triángulo  $PMN$ .



3. En la figura, el área del rectángulo  $ABCD$  es 40. ¿Cuál es el área de  $MBCN$ ?

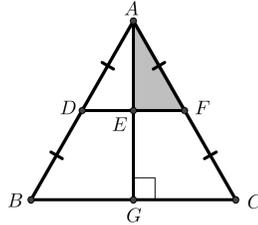


4. En el rectángulo  $ABCD$ ,  $M$  y  $N$  son puntos medios de  $BC$  y  $CD$  respectivamente. Si  $CM = 4$  y  $NC = 5$ , ¿Qué porcentaje del área del rectángulo está sombreado?

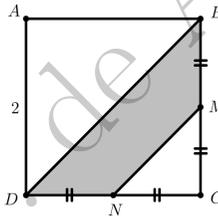


5. En la figura, el triángulo  $ABC$  es isósceles con  $AB = AC$ ,  $AG$  es perpendicular a  $BC$ , los puntos  $D$  y  $F$  son puntos medios de  $AB$  y

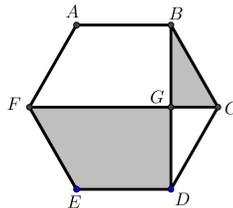
$AC$  respectivamente y el punto  $E$  es el punto de intersección de  $DF$  y  $AG$ . ¿Cuál es la fracción del triángulo que esta sombreada?



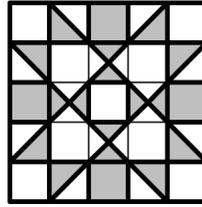
6. En la figura, el cuadrado  $ABCD$  tiene lado de longitud 2, los puntos  $M$  y  $N$  son puntos medios de  $BC$  y  $CD$  respectivamente. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



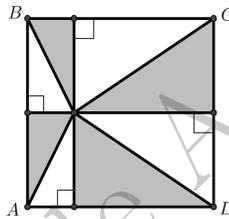
7. En el hexágono regular  $ABCDEF$  de la figura, se trazan las diagonales  $BD$  y  $FC$  que se intersecan en  $G$ . ¿Cuál es la razón del área del cuadrilátero  $FEDG$  al área del triángulo  $BCG$ ?



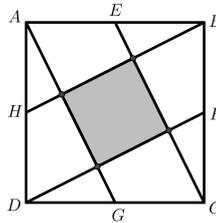
8. En la figura, se muestra un cuadrado cortado en cuadrados idénticos y algunos triángulos isósceles. ¿Que porcentaje del cuadrado esta sombreado?



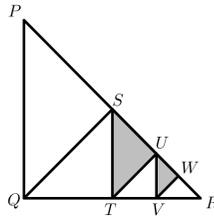
9. En la figura, el cuadrado  $ABCD$  tiene lados de longitud 4. ¿Cuál es el total del área sombreada?



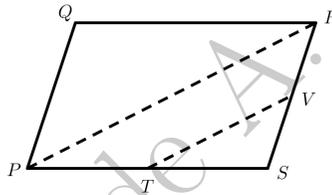
10. En la figura, El cuadrado  $ABCD$  es tal que  $E, F, G$  y  $H$  son los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD, DA$  respectivamente. ¿Qué fracción del cuadrado  $ABCD$  es el área sombreada?



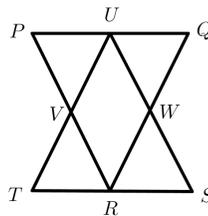
11. En el triángulo rectángulo  $PQR$ ,  $PQ = QR$ . Los segmentos  $QS, TU$  y  $VW$  son perpendiculares a  $PR$ , y los segmentos  $ST$  y  $UV$  son perpendiculares a  $QR$  como se ve en la figura. ¿Qué fracción del triángulo  $PQR$  esta sombreada?



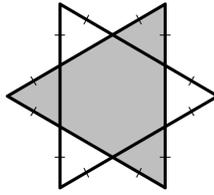
12. En la figura,  $PQRS$  es un paralelogramo con área 40. Sean  $T$  y  $V$  son puntos medios de  $PS$  y  $RS$  respectivamente, ¿Cuál es el área de  $PRVT$ ?



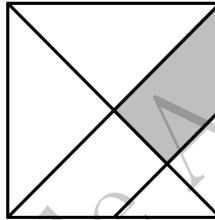
13. Cada uno de los triángulos  $PQR$  y  $STU$  tiene área 1. En el triángulo  $PQR$ ,  $U$ ,  $W$ ,  $V$  son puntos medios de los lados y en el triángulo  $STU$ ,  $R$ ,  $V$  y  $W$  son puntos medios de los lados. ¿Cuál es el área del paralelogramo  $UVRW$ ?



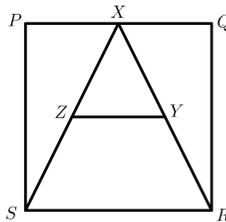
14. La estrella en la figura, se construye con dos triángulos equiláteros idénticos. Si el área de la estrella completa es 36. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?



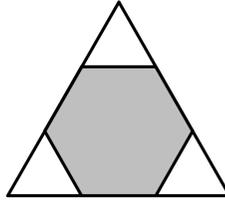
15. Un cuadrado es dividido como lo muestra la figura. ¿Que fracción del cuadrado esta sombreada?



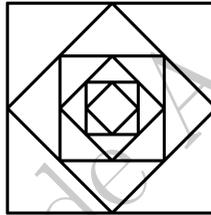
16. En la figura,  $PQRS$  es un cuadrado de longitud 8.  $X$  es el punto medio de  $PQ$ ,  $Y$  y  $Z$  son los puntos medios de  $XR$  y  $XS$  respectivamente. ¿Cuál es el área del trapezoide  $ZYRS$ ?



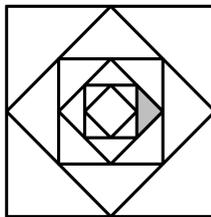
17. Un hexágono regular es inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura. Si el hexágono tiene área igual a 12, ¿Cuál es el área del triángulo?



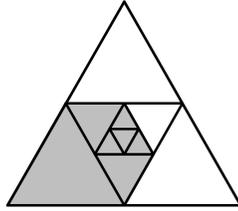
18. En la figura, los vértices de cada cuadrado son los puntos medios del cuadrado inmediatamente más grande. ¿Qué fracción del cuadrado grande el cuadrado más pequeño?



19. En la figura, los vértices de cada cuadrado son los puntos medios del cuadrado inmediatamente más grande. Si el triángulo sombreado tiene un área igual a 6. ¿Cuál es el área del cuadrado más grande?



20. En la figura, los vértices de cada triángulo son los puntos medios del triángulo inmediatamente más grande. ¿Qué fracción del triángulo más grande es el área sombreada?



21. Cada una de las divisiones de los lados rectángulo de la figura miden 1. ¿Cuál es el área sombreada?

