OLIMPIADAS DE MATEMATICA, 2014.
Universidad de Antioquia
Contextos.

AVISO: *Los textos aquí publicados son responsabilidad total de sus creadores. Estos son materiales en construcción.*
Errores y/o comentarios por favor comunicarlos a: olimpiadasmatematicas@udea.edu.co

1. Algebra básica.

1. **Propiedades de la potenciación**: Recordemos algunas de las propiedades básicas de la potenciación.

   - $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$.
   - Si $0 < a \leq b$ entonces $a^n \leq b^n$. Por ejemplo, si $8 < 9$ entonces $8^5 < 9^5$. Observa con atención que $8 = 2^3$ y $9 = 3^2$, así podemos concluir $\left(2^3\right)^5 < \left(3^2\right)^5$, es decir, $2^{15} < 3^{10}$.
   - $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, para $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ impar y donde la suma en el segundo factor es alternada. Por ejemplo, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
   - $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, para cualquier $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Por ejemplo, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
   - $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, donde el número natural $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es llamado de **coeficiente binomial**. Los coeficientes binomiales en la expansión anterior satisfacen un patrón de comportamiento inductivo sujeto a las siguientes propiedades, para cada $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$ y:

     $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}, \forall 1 \leq k \leq n-1; \quad \binom{n}{n} = 1.$$

     Una manera fácil de recordar este comportamiento es através del llamado **triángulo de Pascal**:

     $$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

     En otras palabras, este triángulo corresponde a la representación de los coeficientes binomiales de acuerdo a su grado

     $$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

     ¿Cómo usarias la fórmula de la expansión del binomio para probar que las filas de este triángulo corresponde a la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos, esto es, 2^n?

2. **Sobre el factorial de un entero positivo**: Recordamos que el factorial de un número entero positivo n es el número entero positivo $n! := n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, es decir, obtenido como el producto de todos los enteros positivos menores e iguales que n. Observe, que $n!$ es un número divisible por todos los enteros menores e iguales que n, en otras palabras, $n!$ es multiplo de 2, 3, 4, …, $n-2$, $n-1$ y n. Por ejemplo,

Olimpiadas Matemáticas U. de A.

- $2! = 2$ que es múltiplo de 2.
- $3! = 6$ que es múltiplo de 2 y 3.
- $4! = 24$ que es múltiplo de 2, 3 y 4 (y también de 6 y 12).
- $5! = 120$ que es múltiplo de 2, 3, 4 y 5 (y también de 6, 12, 15, 20, 30...).
- $6! = 720$ que es múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, y así sucesivamente.

Por otro lado, como es fácil notar a partir de los ejemplos y con la ayuda de un famoso resultado de divisibilidad de números enteros (el Lema de Euclides), podemos concluir que, si k y l son enteros positivos sin factores comunes (es decir, el m.c.d(k, l) =1) que dividen a $n!$ entonces su producto $k \cdot l$ también divide a $n!$.
Por ejemplo, $6 = 2 \times 3$ divide a todos los factoriales $n!$ con $n \geq 3$, ya que 2 y 3 (los cuales no tienen factores comunes pues son primos) siempre dividen a $n!$. $10 = 2 \times 5$, $20 = 4 \times 5$, por ejemplo, dividen a todos los factoriales $n!$, con $n \geq 5$. ¿Que tal buscar más ejemplos como estos?.

3. **Sobre el Teorema Fundamental de la Aritmética**: Recordemos que el Teorema Fundamental de la Aritmética nos garantiza que todo número entero positivo se puede descomponer de forma única, a menos del orden, como producto de potencias de números primos. En simbolos, para cada entero positivo n, tenemos existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, números naturales <u>mayores o iguales a cero</u> tales que

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}} \cdot p_r^{\alpha_r},$$

donde los $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son números primos.
Entre las múltiples aplicaciones de este teorema en la matemática, aqui nos ocuparemos de 3 de ellas: el cálculo de divisores de un entero positivo, el cálculo de divisores y múltiplos comunes entre parejas de números enteros positivos.

- **Divisores de un entero**: Para n un entero positivo, apartir de su descomposición en producto de potencias de números primos $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ podemos caracterizar todos sus divisores como el producto de potencias de los primos que aparecen en esta descomposición con potencias menores o iguales que los α_i, en palabras más precisas, todo divisor l de n es de la forma $l = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$ donde $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$,...,$0 \leq \beta_r \leq \alpha_r$.
  Ilustremos la afirmación con un ejemplo: Para $30 = 2 \times 3 \times 5$, sus (8) divisores seran $1 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0$, $2 = 2 \times 3^0 \times 5^0$, $3 = 2^0 \times 3 \times 5^0$, $5 = 2^0 \times 3^0 \times 5$, $6 = 2 \times 3 \times 5^0$, $10 = 2 \times 3^0 \times 5$, $15 = 2^0 \times 3 \times 5$ y 30.
  Un ejemplo más: para $45 = 3^2 \times 5$, sus (6) divisores son $1 = 3^0 \times 5^0$, $3 = 3 \times 5^0$, $5 = 3^0 \times 5$, $9 = 3^2 \times 5^0$, $15 = 3 \times 5$ y $45 = 3^2 \times 5$.
  Como lo ilustran también los ejemplos es fácil, apartir de la mencionada descomposición, determinar la cantidad de divisores que posee un número entero positivo. En efecto, para esto basta contar el número de todas las combinaciones posibles de productos de potencias de primos con exponentes menores o iguales que los α_i, con $i = 1, \ldots, r$.
  Para este conteo, iniciamos con un ejemplo simple: si $n = p_1^{\alpha_1}$, es decir, si n es la potencia de un primo. En este caso es bien fácil contar los divisores de n, pues son 1, p_1, p_1^2,..., $p_1^{\alpha_1 - 1}$, $p_1^{\alpha_1}$, en otras palabras, un total de $\alpha_1 + 1$ divisores.
  Ahora si consideramos a $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ observa que por lo dicho anteriormente tendriamos que contar todas las combinaciones posibles de producto de potencias $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$ donde β_1 y β_2 recorren los conjuntos $\{0, 1, \ldots, \alpha_1 - 1, \alpha_1\}$ y $\{0, 1, \ldots, \alpha_2 - 1, \alpha_2\}$, respectivamente.
  De esta forma, el número total de estas combinaciones es el producto de las posibilidades que tengo para cada β_i, $i = 1, 2$, esto es, $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1)$ posibilidades, en otras palabras, n tendrá $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1)$ divisores.
  Así, ya es fácil generalizar: para cualquier entero positivo $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ tendremos un total de $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \cdots (\alpha_r + 1)$ divisores!!!.
  Volvamos a los ejemplos: $30 = 2 \times 3 \times 5$ tiene un total de $(1+1)(1+1)(1+1) = 2^3 = 8$ divisores!! y $45 = 3^2 \times 5$ tiene $(2 + 1)(1 + 1) = 3 \times 2 = 6$ divisores!!. ¿Porque no hacer un par de ejemplos más?

Olimpiadas Matemáticas, U. de A.

- **Máximo divisor común y Mínimo múltiplo común**: Para un par de enteros positivos
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \quad \text{y} \quad m = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_s^{\delta_s}$$
podemos preguntarnos: ¿Cual es el menor divisor que los divide a ambos o cual es el menor divisor común?, ¿Cual es el mayor divisor que los divide a ambos o cual es el mayor divisor común?, ¿Cual es el menor múltiplo de ambos o cual es el menor multiplo común?, ¿Cual es el mayor múltiplo de ambos o cual es el mayor múltiplo común?
Bueno, la primera y última pregunta son muy (pero muy) fáciles de responder, pues el menor divisor a ambos es el 1!!!! y el mayor multiplo de ambos es su producto $n \times m$!!!!!.
Por otro lado, la segunda y cuarta pregunta son fáciles de responder pero no de manera tan inmediata como las dos anteriores. Para responderlas iniciamos con un ejemplo simple: que tal si $n = p_1^{\alpha_1}$ y $m = p_1^{\delta_1}$. En este caso es fácil responder las preguntas: el mayor divisor común es la menor potencia de p_1 y el menor multiplo es la mayor potencia de p_1. Por ejemplo, si $n = 5^3 = 125$ y $m = 5^6 = 15625$ su máximo común divisor será 5^3 y su mínimo común múltiplo será 5^6, en simbolos, $\text{m.c.d}(125, 15625) = 5^3$ y $\text{m.c.m}(125, 15625) = 5^6$.
Ahora es fácil generalizar: por el análisis en el numeral anterior, sabemos que divisores (y, asi mismo, multiplos) de un entero positivo son productos de las potencias de los primos que figuran en su descomposición entonces calcular el máximo común divisor y el mínimo común multiplo del par n y m, será el producto, respectivamente, de las potencias mínimas comunes y las potencias máximas comunes. En la práctica esto funciona así: si nos piden calcular el m.c.d y el m.c.m de 30 y 45, escribimos 30 y 45 en potencias "comunes": $30 = 2 \times 3 \times 5$ y $45 = 3^2 \times 5 = 2^0 \times 3^2 \times 5$ y así ya es facilísimo: $\text{m.c.d}(30, 45) = 2^0 \times 3 \times 5 = 15$ y $\text{m.c.m}(30, 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$.
¿Por que no practicar con otros ejemplos?

2. Funciones

1. **Sucesiones de números reales:** Un caso especial de las funciones $f : A \to \mathbb{R}$ definidas sobre subconjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ de números reales son aquellas definidas sobre los números naturales $A = \mathbb{N}$, las cuales son llamadas de *sucesiones*. En este caso, los valores de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ en cada natural $n \in \mathbb{N}$ es representado por $a_n := f(n)$ y es llamado el $n-$*ésimo termino de la sucesión* y el conjunto de valores de la función será representado por $\{a_n\}$.
Las sucesiones son de gran interés ya que el estudio del comportamiento de muchos tipos de funciones dependen del comportamiento de las sucesiones que ellas definan, una manera corta de decirlo es: "el comportamiento discreto de la función predice el comportamiento continuo de esta misma". Por otro lado, muchas herramientas en matemáticas son definidas o sus definiciones dependen de la comprensión de las sucesiones, como por ejemplo, los limites, las series, las sumas de Riemann, la integración de funciones, etc. Sin embargo, aqui estamos interesados en un estudio muy específico y simple de las sucesiones: nos preguntamos sobre la suma de los n-primeros términos de algunas sucesiones bien conocidas. Más precisamente, queremos calcular
$$\sum_{i=1}^{n} i = ?? \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = ?? \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = ?? \qquad \sum_{i=1}^{n} i^4 = ??$$
La primera es bien conocida, $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ es la llamada suma de Gauss, la cuál sabemos es igual a $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Ahora, para la segunda suma vamos a usar las siguientes propiedades de las sumas de sucesiones (que debes intentar probar): Si llamamos S y T las sumas de los términos de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente, esto es, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = S$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = T$ se satisfacen las siguientes propiedades

Olimpiadas Matemáticas U. de A.

- $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = 1+1+\cdots+1 = n$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = cS$, donde $c \in \mathbb{R}$.
- $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots (a_n \pm b_n) = S \pm T$.
- $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$

La primera es la suma de **sucesión constante** igual a 1, i.e., $a_i = 1$ para todo natural $i \in \mathbb{N}$. Las dos siguientes propiedades son llamadas de la **linealidad de la suma** y la última es llamada de la **suma telescópica**.
Usando estas propiedades es fácil probar que $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
En efecto, por un lado como consecuencia de la expansión binomial tenemos

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$$

Por la suma telescópica se sigue $\sum\limits_{i=1}^{n} (i+1)^3 - i^3 = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$, de donde por la linealidad

$$n^3 + 3n^2 + 3n = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - i^3 = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

y despejando la suma de nuestro interés, se sigue

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 5n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

lo que queriamos probar.
Con raciocinios similares se pueden calcular las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

¿Conseguiras probar estos resultados?.

2. **funciones inyectivas, biyectivas e inversas**: Una función es llamada *inyectiva* cuando cada elemento en su imagen recibe una única pre-imagen. En otras palabras, si dados $f : A \to B$ una función, $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$. Ahora, cuando el codominio de la función coincide con la imagen de la función, esto es, $f(A) = B$ y además la función f es inyectiva, la función es llamada de función *biyectiva*. En consecuencia, si $f : A \to B$ es inyectiva entonces $f : A \to f(A)$ es biyectiva. Ejemplos de funciones inyectivas son las funciones *estrictamente crecientes* y *estrictamente decrecientes*, esto es, son aquellas que satifacen la siguiente propiedad, respectivamente, para cada $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2); \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

por ejemplo, las funciones $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = x^3$, para cada $x \in \mathbb{R}$, son ejemplos de funciones estrictamente crecientes y las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, para cada $x \in (0, +\infty)$ y $g(x) = -2x + 5$, para cada $x \in \mathbb{R}$, son ejemplos de funciones estrictamente decrecientes. Ahora, es fácil probar que la composición de dos funciones estrictamente crecientes es una función estrictamente creciente y que la compuesta de una estrictamente creciente con una estrictamente decreciente es estrictamente decreciente. Por otro lado, la composición de dos estrictamentes decrecientes es una función estrictamente creciente. ¿Por que no intentas validar estas afirmaciones?
Ahora bien, toda función biyectiva $f : A \to B$ admite una *función inversa*, esto es, existe una función $g : B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$, para cada $x \in A$ y $f(g(x)) = x$, para cada $x \in B$. Cuando esto ocurre simbolizamos a g por f^{-1}, es decir, $f^{-1} : B \to A$ es la

Olimpiadas Matemáticas U. de A.

función tal que $f^{-1}(f(x)) = x$, para cada $x \in A$ y $f(f^{-1}(x)) = x$, para cada $x \in B$. En otras palabras,

$$y = f(x) \quad \text{si y solo si} \quad x = f^{-1}(y)$$

Así, la función inversa podemos interpretarla como aquella función que "devuelve" todo lo que hace la función f. Por ejemplo, es fácil ver que el dominio de la función f es la imagen de la función f^{-1} y que el dominio de la función f^{-1} es la imagen de la función f.

Una manera fácil de calcular la inversa de una función biyectiva dada es "despejando x en términos de y". Esto se refiere al siguiente proceso que ilustraremos con un ejemplo: Sea $y = \frac{1}{2x+5}$, la función inyectiva (¿por qué?) definida sobre $(0, +\infty)$. Ella será entonces una función biyectiva sobre su imagen, la cual es fácil de calcular, pues $0 < x$ y asi $0 < 2x + 5$ y por tanto $0 < \frac{1}{2x+5}$, esto es, la imagen de esta función es también $(0, +\infty)$. Ahora para calcular la inversa, despejamos:

$$y = \frac{1}{2x+5} \quad \Leftrightarrow \quad (2x+5)y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2yx = 1 - 5y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1-5y}{2y}$$

y de esta forma la función inversa es definida como $f^{-1}(x) = \frac{1-5x}{2x}$, para cada $x \in (0, \infty)$, que es, al contrario de f, una función creciente (¿por qué?).

3. Geometría

1. **Resultados sobre triángulos en la geometría euclidiana plana**:

   - Un triángulo es llamado equilátero si sus 3 lados son congruentes. El triángulo es llamado isósceles si dos de sus lados son congruentes. Debido a la relación entre lados y ángulos opuestos de un triángulo ("a lado mayor se opone ángulo mayor") podemos concluir que en un triángulo equilátero todos sus ángulos son iguales, y en uno isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son iguales. En particular, dado que la suma de los ángulos interiores a un triángulo suman π o 180^o (como consecuencia de una versión equivalente al **quinto postulado de Euclides**: "por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a esa recta"), en un triángulo equilátero sus ángulos toman el valor de $\frac{\pi}{3}$ o 60^o.
   - Para un triángulo cualquiera de vértices ABC y lados a, b y c, cada uno de ellos opuesto a su respectivo vértice, es decir, a es opuesto a A, etc (¿por que no intentas hacer la figura?). La recta que une el vértice A con el lado a, por ejemplo, si divide a a en dos partes iguales es llamada la *mediana* de a, si divide al ángulo en A en dos partes iguales es llamada la *bisectriz* del ángulo en A, y si el ángulo que forma esta recta con el lado a es *recto*, es decir, de valor $\frac{\pi}{2}$ o 90^o, decimos que es la *altura* de ABC con pie en a.
   - En un triángulo isósceles ABC de lados congruentes b y c es tal que la mediana desde A a a acaba siendo bisectriz del ángulo en A y altura con pie en a. En particular, esto también vale si el triángulo es equilátero, pero a diferencia del triángulo isósceles esto es válido para cualquier vértice y su respectivo lado opuesto.
   - Ahora en todo triángulo de vértices ABC y lados a, b y c, indicamos por a, b y c también las longitudes de sus lados. En este sentido, vale un importante resultado el cual es también un criterio para la construcción o mejor, garantizar la existencia de triángulos con ciertas longitudes predeterminadas: **la desigualdad triangular**: $a+b > c$, $a+c > b$ y $b+c > a$, en palabras, la suma de las longitudes de dos lados cualquiera de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercer lado.
   - Dos triángulos ABC y DEF de lados con magnitudes a, b, c y d, e, f, respectivamente, son llamados *semejantes* cuando la razón entre las magnitudes de pares de lados correspondientes es siempre la misma, en simbolos, $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.
     El caso mas común de triángulos semejantes es cuando sus ángulos correspondientes son iguales, esto es, si $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ y $\hat{C} = \hat{F}$ entonces los triángulos ABC y DEF son semejantes.
     Esta situación se presenta, por ejemplo, cuando los triangulos comparten un vértice y el par de lados opuestos a ese vértice son paralelos, en simbolos, si ABC y AEF

Olimpiadas Matemáticas U. de A.

son triángulos tales que los lados a y d opuestos al vértice A son tales que $a||d$ (es decir, paralelos) entonces ABC y AEF son semejantes. (¿Cuál será la figura que explique esta situación?).

- Cuándo uno de los ángulos de un triángulo tiene medida de $\frac{\pi}{2}$ o 90^o, es decir, es un ángulo recto, el triángulo es llamado de *triángulo rectángulo*. Si ABC es un triángulo rectángulo que es recto en $\hat{A}$ el lado opuesto es llamado de *hipotenusa*, los lados restantes son llamados de *catetos*.
  Una bella relación entre las longitudes de la hipotenusa y de los catetos en un triángulo rectángulo es establecida por el **Teorema de Pitagoras**: "el área del cuadrado construido de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos de lados los catetos", en simbolos, si ABC es un triángulo rectángulo recto en $\hat{A}$ entonces $a^2 = b^2 + c^2$, para a, b y c longitudes de los lados opuestos a sus respectivos vértices.

2. **Paralelogramos**: los paralelogramos son tipos especiales de cuadrilateros (es decir, una figura plana con 4 lados y 4 vértices) cuyos lados opuestos son paralelos y congruentes, en simbolos, el cuadrilatero $ABCD$ es un paralelogramo cuando $\overline{AB}||\overline{CD}$, $\overline{AD}||\overline{BC}$, $\overline{AB}$ es congruente a $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ es congruente con $\overline{BC}$.
   Se puede demostrar que en un paralelogramo los pares de ángulos opuestos son congruentes, las 2 *diagonales* (es decir, las rectas que unen vértices opuestos, en otras palabras, rectas que unen vertices no adyacentes) son siempre congruentes y se intersectan en el punto medio de ambas, y, además, la suma de sus 4 ángulos interiores es 2π o 360^o.
   Casos especiales de paralelogramos son:
   a) El *rombo*: un paralelogramo con todos sus 4 lados congruentes.
   b) El *rectángulo*: un paralelogramo con sus 4 ángulos congruentes. (y por tanto todos son rectos!!).
   c) El *cuadrado*: un paralelogramo con todos sus 4 lados y 4 ángulos congruentes.

3. **Polígonos**: cuando una figura plana posee mas de 4 lados, en general, es llamada de poligono o $n-$agono donde n hace referncia al número de lados de la figura. En muchas ocasiones recurrimos a prefijos (de origen latino) que representan la cantidad de lados: penta- es cinco, así que *pentagono* representa una figura con 5 lados, hexa- es 6 así el *hexagono* representa una figura con 6 lados. Así podemos continuar con: heptagono, octágono, eneagono, decagono, etc. Ahora cuando un poligono tiene todos sus lados y ángulos iguales es llamado de regular.
   Se puede probar que la suma de los ángulos interiores de un poligono regular de n lados es $\pi \times (n-2)$ o $180^o \times (n-2)$ y la cantidad de diagonales y ángulos interiores es de $\frac{n\times(n-3)}{2}$ y $\pi \times \frac{n-2}{n}$ o $180^o \times \frac{n-2}{n}$, respectivamente (estos son unos buenos problemas de conteo, ¿por que no intentas probarlos?).

Olimpiadas Matemáticas, U. de A.